

# ME-232: Mécanique des structures

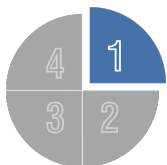
$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

## Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

Pr. Shea & Dr. Preneloup

SGM BA3 2025-2026

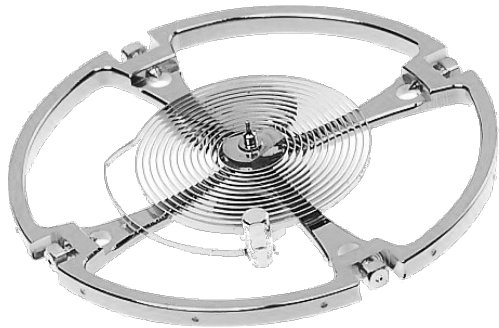
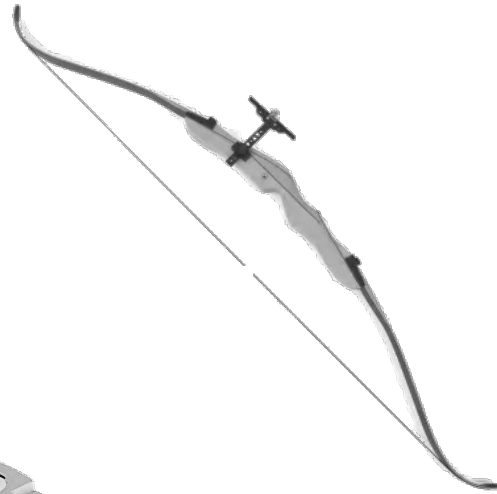
**EPFL**



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Applications



Exprimer l'énergie de déformation

Théorème de réciprocité

Coefficients d'influence

Théorème de Castigliano

- **Problèmes hyperstatiques** : les réactions ou efforts redondants en utilisant l'énergie de déformation plutôt que des équations de compatibilité. (voir chapitre 11)
- **Structures soumises à plusieurs types de sollicitations** : flexion, traction, torsion, etc.
- **Ressorts ou éléments courbes** : simplifie le calcul des déformations sans résoudre d'équations différentielles complexes.
- ...

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## But de ce chapitre:

- **Savoir utiliser le théorème de Castigliano pour calculer la déflexion d'un objet à un point donné.**
- Pour ce faire, il nous faudra calculer **l'énergie de déformation** pour différentes contraintes.

## Formules utiles de ce chapitre:

$$U = U_N + U_{M_t} + U_{M_f} + U_T$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \int_0^{\ell} \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{\eta T}{GF} \frac{\partial T}{\partial P_k} dx$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Expression de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation totale d'une poutre soumise à plusieurs sollicitations (traction, flexion, cisaillement, torsion, etc.) peut s'écrire comme la **somme** (ou superposition) des énergies de déformation associées à chaque type de sollicitation **indépendante**.

Vrai tant que le comportement du matériau reste **linéaire élastique**, et petites déformations, et pas de champs de contraintes couplés, etc.

$$U = U_N + U_{M_t} + U_{M_f} + U_T$$

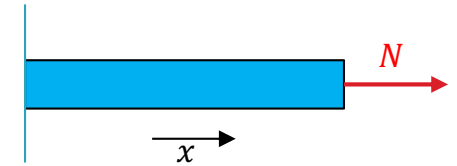
- $U_N$  énergie Forces Normales : traction / compression
- $U_{M_t}$  énergie Torsion
- $U_{M_f}$  énergie Flexion
- $U_T$  énergie Cisaillement (effort Tranchant)

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Expression de l'énergie de déformation

Énergie de déformation élastique d'une poutre longueur  $l$  soumise à un **effort normal  $N$**



$$U = \int_0^l \sigma(x) \varepsilon(x) F dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx$$

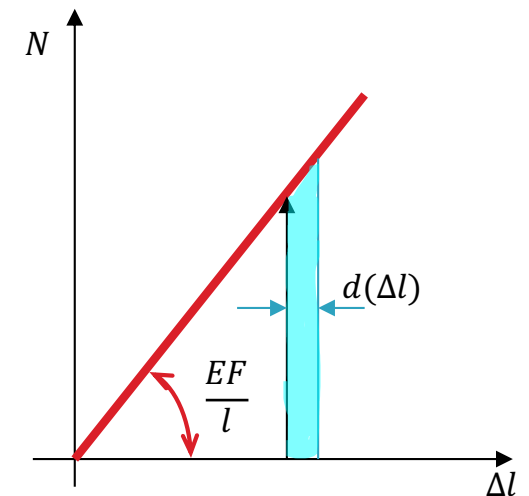
$$\bullet \quad U = \int_0^{\Delta l} dU = \int_0^{\Delta l} N d(\Delta l) = \frac{EF}{l} \int_0^{\Delta l} \Delta l d(\Delta l)$$

$dU = N \cdot d(\Delta l)$        $N = \frac{\Delta l EF}{l}$

$$U = \frac{EF(\Delta l)^2}{2l} = \frac{\Delta l}{l} EF \frac{\Delta l}{2} = N \frac{\Delta l}{2} = \frac{N^2 l}{2EF}$$

$$\bullet \quad dU = \frac{N^2}{2EF} dx$$

$$\bullet \quad U_N = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx$$



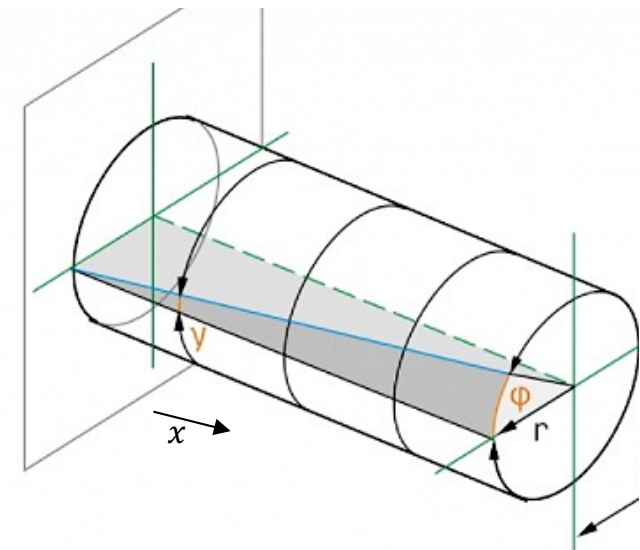
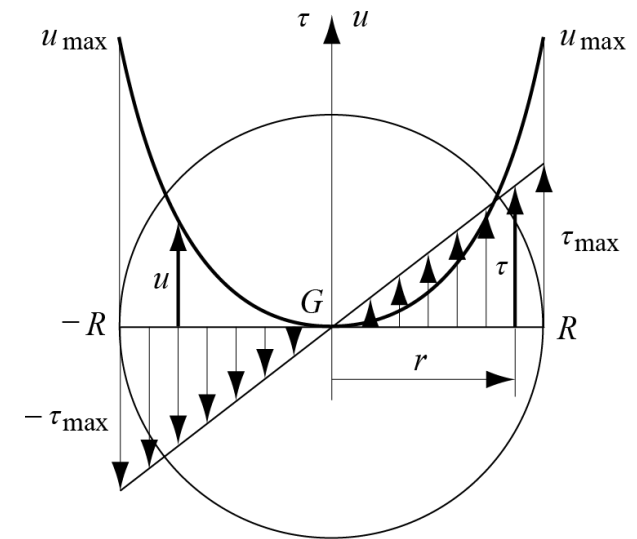
## Expression de l'énergie de déformation

Énergie de déformation élastique d'une poutre de longueur  $l$  soumise à un **effort de torsion  $M_t$**

$$\bullet \quad dU = \frac{1}{2} M_t d\varphi = \frac{M_t^2}{2G I_p} dx$$

$\uparrow$   
 $d\varphi = \frac{M_t dx}{G I_p}$

$$\bullet \quad U_{M_t} = \int_0^l \frac{M_t^2}{2G I_p} dx$$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Expression de l'énergie de déformation

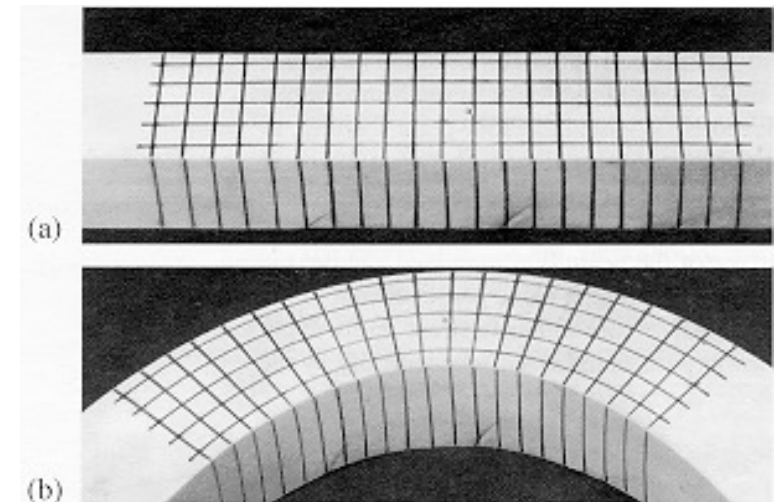
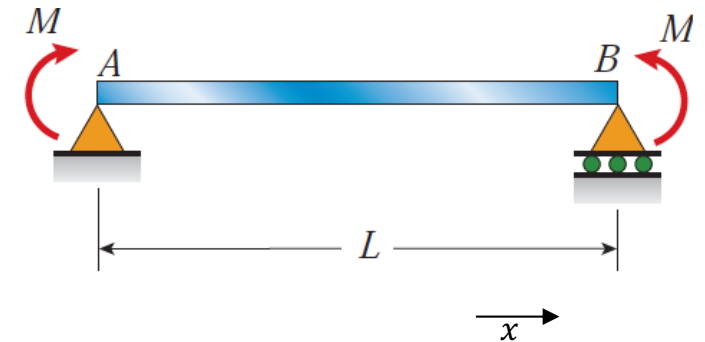
Énergie de déformation élastique d'une poutre de longueur  $l$  soumise à un **moment de flexion pure  $M_f$**  (déjà vu: slides 60 du chapitre 6)

$$\bullet \quad dU = \frac{1}{2} M_f d\theta = \frac{1}{2} M_f \frac{dx}{\rho} = \frac{M_f^2}{2EI} dx$$

$\uparrow$   $dx = \rho d\theta$                        $\uparrow$   $1/\rho = M/EI$

$$\bullet \quad U_{M_f} = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EI} dx$$

- Le moment de flexion provoque des déformations uniquement longitudinales, alors que l'effort tranchant provoque des déformations uniquement transversales.
- Il est donc possible de calculer séparément les énergies de déformation dues au moment de flexion et à l'effort tranchant.



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

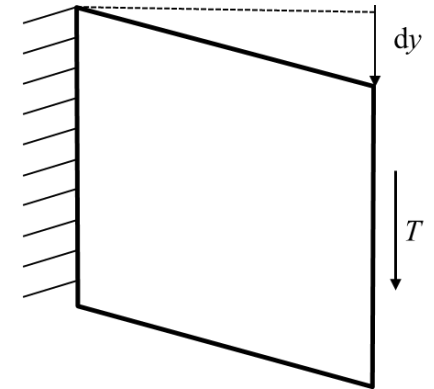
## Expression de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation en **cisaillement simple**  $T$  équivaut au demi-produit de l'effort tranchant  $T$  par le glissement  $dy$  de la section  $F$

$$\bullet \quad dU = \frac{1}{2} T dy = \frac{1}{2} \tau F \cdot \gamma dx = \frac{1}{2} \tau \gamma dV$$

$dy = \gamma dx$        $F \cdot dx = dV$        $\gamma = \frac{\tau}{G}$

$$dU = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV$$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Expression de l'énergie de déformation

Énergie de déformation élastique d'une poutre soumise à un **effort tranchant**

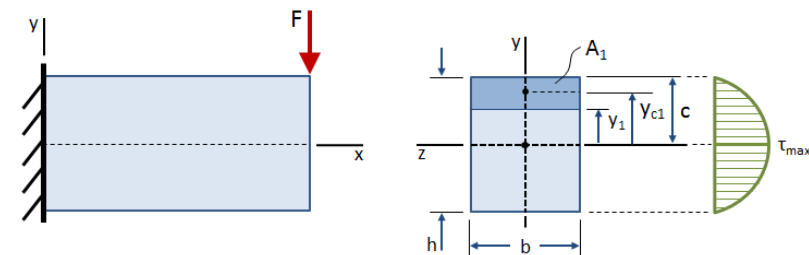
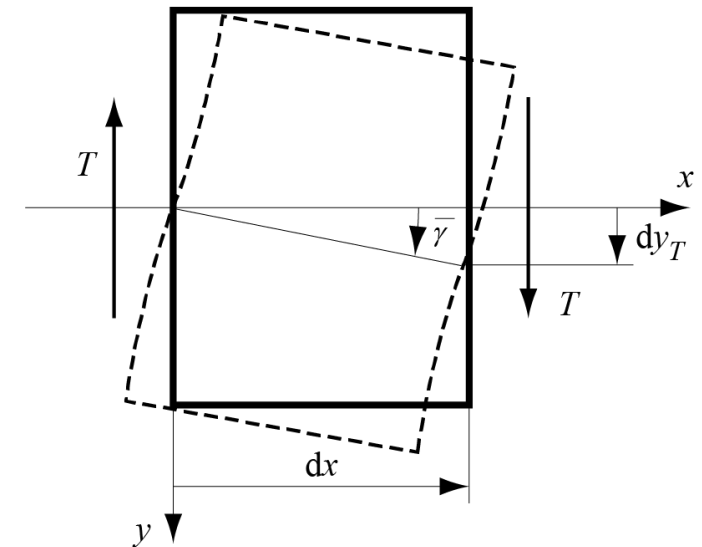
Du fait que la **contrainte tangentielle  $\tau$**  et l'**angle de glissement  $\gamma$**  varient dans la section, les fibres subissent ainsi des déplacements transversaux différents et la section ne peut rester plane. **Approximation** : Le déplacement transversal relatif des deux sections d'un élément de poutre de longueur  $dx$ , provoqué par l'effort tranchant  $T$ , peut être caractérisé par un **angle de glissement global  $\bar{\gamma}$**  (voir chapitre 6)

- $dy_T = \bar{\gamma} dx$
- $dU = \frac{1}{2} T dy_T = \frac{1}{2} T \bar{\gamma} dx = \frac{1}{2} T \eta \frac{\tau_{moy}}{G} dx = \eta \frac{T^2}{2GF} dx$
- $U_T = \int_0^{\ell} \frac{\eta T^2}{2GF} dx$

$$\bar{\gamma} = \eta \frac{\tau_{moy}}{G} = \eta \frac{T}{GF}$$

$$\eta = \frac{F}{I^2} \iint_F \frac{S'^2}{b^2} dF$$

sans unités



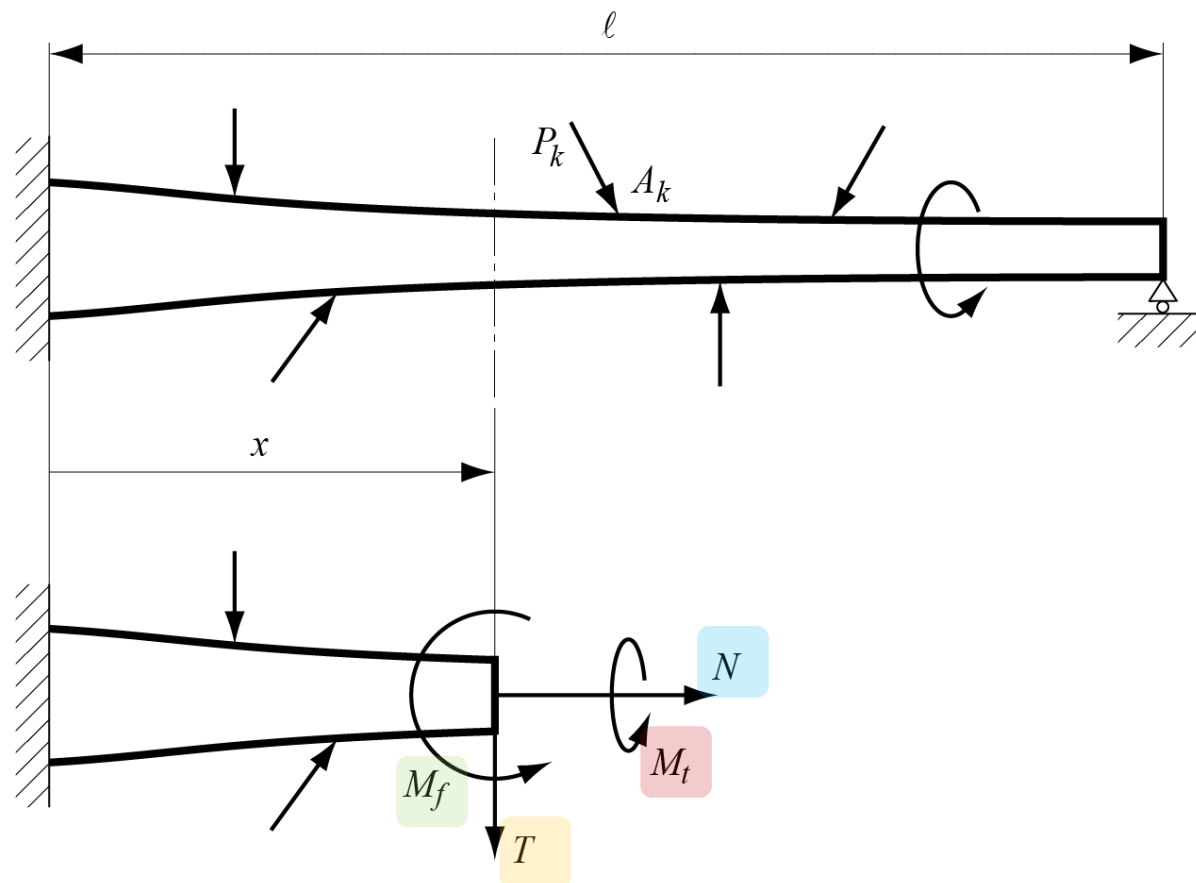
$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Expression de l'énergie de déformation

Soit une poutre de longueur  $\ell$  soumise à un cas de charge quelconque. Dans une section  $x$ , les efforts intérieurs sont l'effort normal  $N(x)$ , le moment de torsion  $M_t(x)$ , le moment de flexion  $M_f(x)$  et l'effort tranchant  $T(x)$ .

La section de la poutre n'est pas nécessairement constante, mais peut varier modérément en fonction de  $x$ .



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

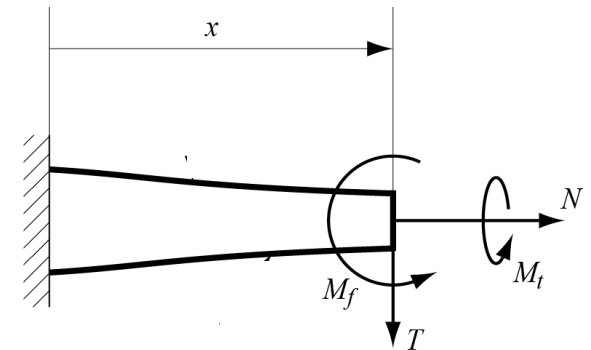
# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Expression de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation relative à chaque effort intérieur peut être calculée par intégration des relations différentielles établies dans les chapitres précédents.

Les formes intégrales des énergies élémentaires de déformation dues à: l'effort normal  $N$ , le moment de torsion  $M_t$ , le moment de flexion  $M_f$  et l'effort tranchant  $T$  ont pour expression

- $U_N = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EF} dx$
- $U_{M_t} = \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2GI_p} dx$
- $U_{M_f} = \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx$
- $U_T = \int_0^{\ell} \frac{\eta T^2}{2GF} dx$



L'énergie de déformation totale  $U$  dans la poutre est la somme des intégrales précédentes

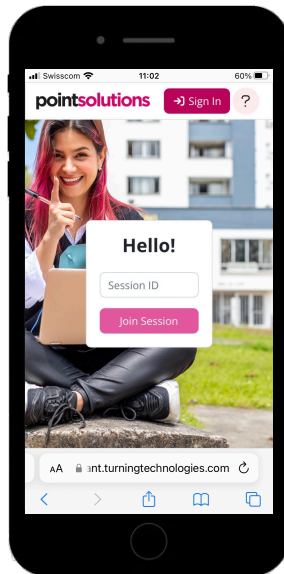
$$U = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EF} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2GI_p} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell} \frac{\eta T^2}{2GF} dx$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Sondage via Turning Point

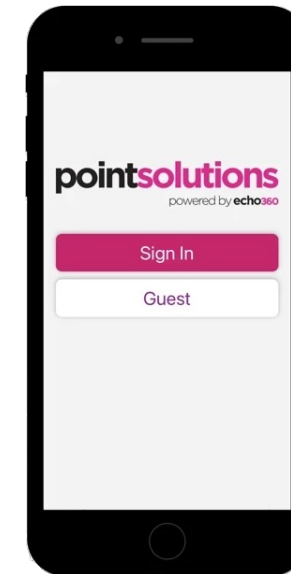
- Ordinateur, tablette ou téléphone
- Navigateur web via l'URL : [ttpoll.eu](http://ttpoll.eu)



→ Session ID: **sgm232**

→ Choisir: Anonymous 

- Tablette ou téléphone
- Installation : **pointsolutions**



→ Session ID: **sgm232**

→ Choisir: Guest

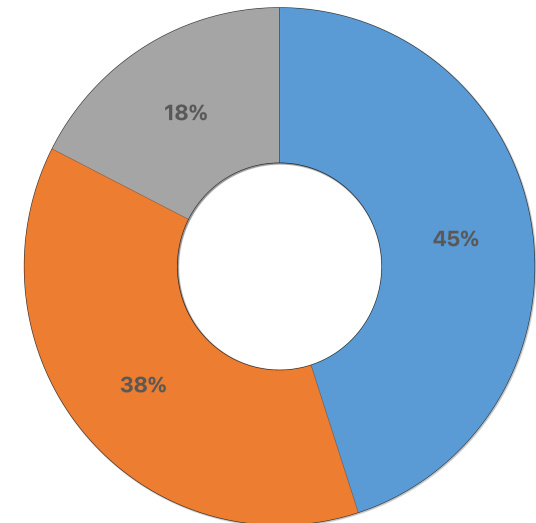
**Nous avons une poutre avec 2 charges,  $F_1$  and  $F_2$ .**

**Pouvons-nous utiliser la superposition**

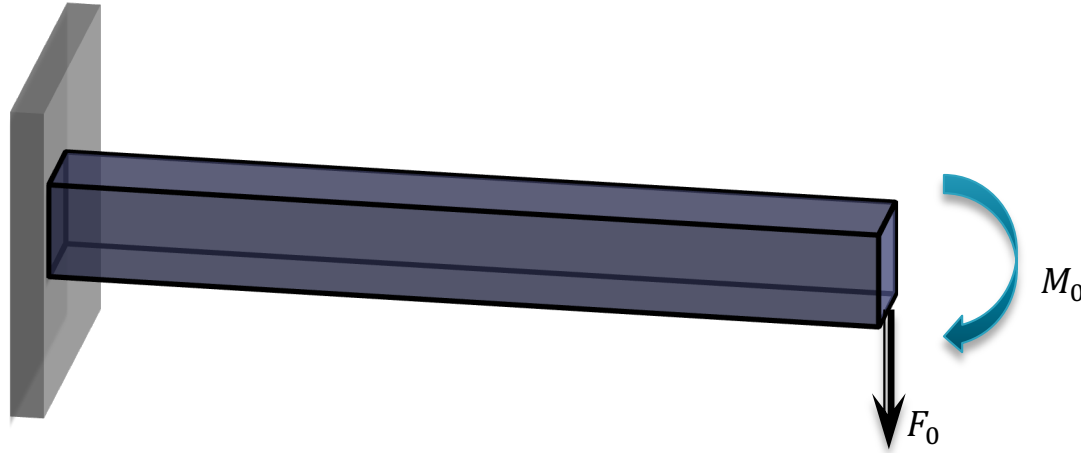
$$U_{flexion} = U_{flexion-F_1} + U_{flexion-F_2} ?$$

- A. Oui, la superposition s'applique ici.
- B. Non, nous ne pouvons pas utiliser la superposition dans ce cas
- C. C'est à l'examen ?

$$U_{flexion} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{EI_z} dx$$

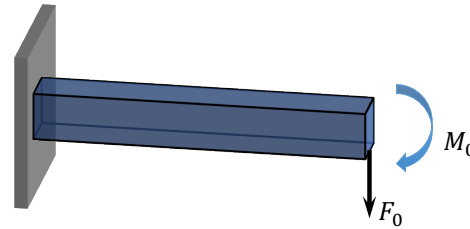


- Oui, la superposition s'applique
- Non, nous ne pouvons pas utiliser la superposition
- Oui, mais seulement si la déformation est petite



Calculons l'énergie de déformation en flexion de cette poutre de deux façons:

- **méthode fausse**: Calculer l'énergie de flexion associée au moment  $M_0$ , puis celle due à la force  $F_0$ , puis les sommer.
- **méthode juste**: Calculer l'énergie de flexion due à la combinaison du moment et de la force



- ▶ Moment interne due seulement au moment  $M_0$

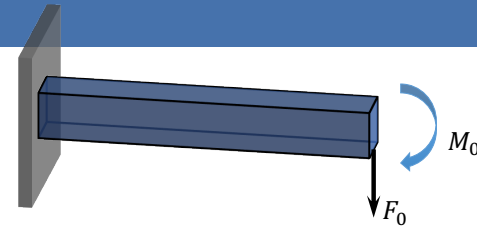
$$M_{M_0}(x) = -M_0$$

$$U_{flex, M_0} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx = \frac{M_0^2}{2EI} L$$

- ▶ Moment interne due seulement à la force  $F_0$

$$M_{F_0}(x) = F_0(x - L)$$

$$U_{flex, F_0} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx = \frac{F_0^2}{6EI} L^3$$



- ▶ Moment interne due aux deux charges ( $F_0$  et  $M_0$ ) en même temps

$$M(x) = F_0(x - L) - M_0$$

$$U_{flex,total} = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left( \frac{F_0^2 L^3}{3} + M_0^2 L + F_0 M_0 L^2 \right)$$

$$U_{flex,total} = U_{flex,M_0} + U_{flex,F_0} + \frac{F_0 M_0}{2EI} L^2$$

- ▶ Nous devons faire attention en utilisant le principe de superposition pour l'énergie. Pour l'expression ci-dessous, bien calculer  $N(x)$ ,  $M_t(x)$ ,  $M_f(x)$  et  $T(x)$  due à tous les efforts externes avant d'intégrer.

$$U_{totale} = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EF} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2GI_p} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx + \int_0^{\ell} \frac{\eta T^2}{2GF} dx$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

## Théorème de Castigliano

(La démonstration de ce théorème est dans annexe de ces slides et dans le livre de Del Pedro)

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Théorème de Castigliano

Le déplacement  $\delta_k$  du point  $A_k$  où s'applique une force  $P_k$  est la dérivée partielle de l'énergie de déformation  $U$  par rapport à cette force (ou moment).

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k} \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2 EF} dx + \frac{\partial}{\partial P_k} \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2 GI_p} dx + \frac{\partial}{\partial P_k} \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2 EI} dx + \frac{\partial}{\partial P_k} \int_0^{\ell} \frac{\eta T^2}{2 GF} dx$$

Cependant, il est presque toujours préférable de permuter la dérivation et les intégrations, de sorte que le déplacement  $\delta_k$  s'écrit:

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \int_0^{\ell} \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{\eta T}{GF} \frac{\partial T}{\partial P_k} dx$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Théorème de Castigliano

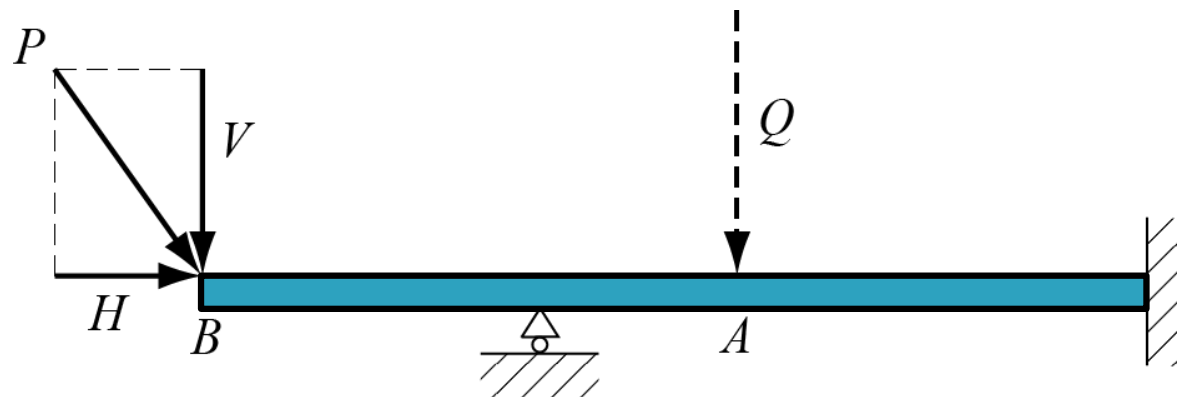
**Mais que faire si aucune force est appliquée au point où l'on veut connaître le déplacement ?**

1. On applique une force  $Q$  arbitraire au point dont on désire connaître le déplacement  $\delta_{AV}$  dans une direction donnée.
2. Après avoir calculé les efforts intérieurs ( $N$ ,  $M_t$ , ..) et leurs dérivées partielles, il suffit d'annuler la force fictive  $Q$  pour connaître le déplacement en ce point.

$$\delta_{AV} = \frac{\partial U}{\partial Q}$$

avec

$$Q = 0$$



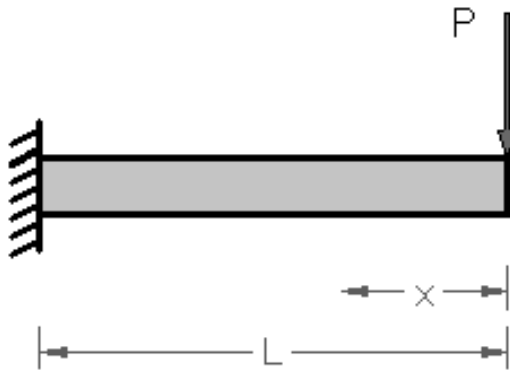
$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## théorème de Castigliano

Exemple simple du théorème de Castigliano pour trouver le déplacement à l'extrémité d'une poutre due à une force P:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$$



$$M(x) = Px$$

$$U_{M_f} = \int_0^L \frac{M_f^2}{2EI} dx$$

$$U_{M_f} = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$\delta = \frac{dU}{dP}$$

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

C'est la même réponse qu'on trouve par les méthodes du chapitre 6!

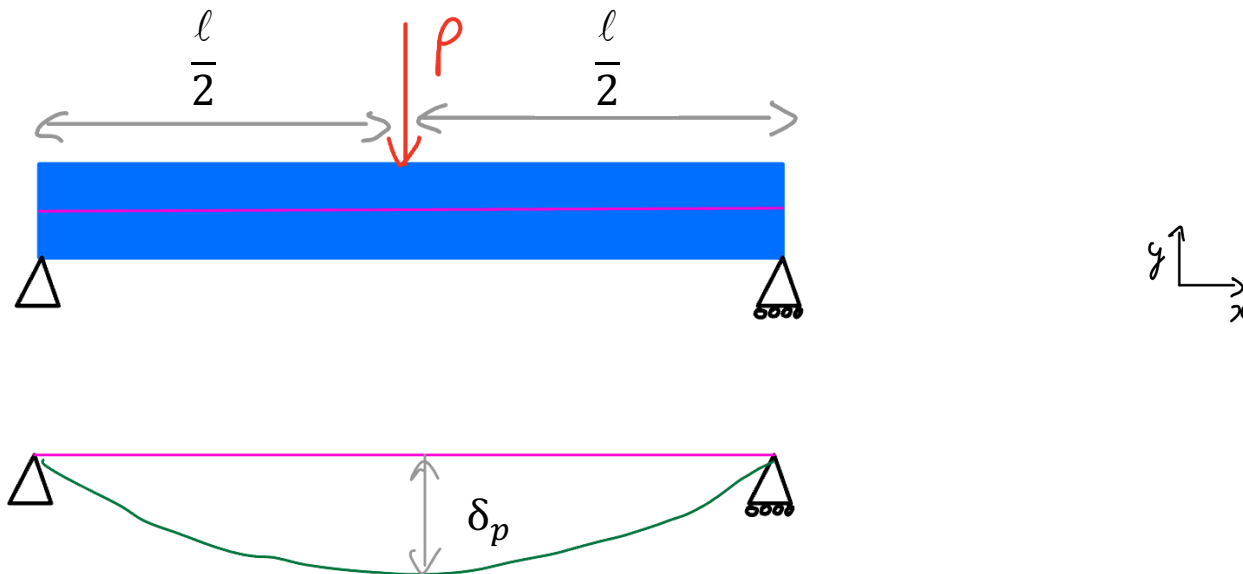
$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 10.0

Déterminer la flèche maximale  $\delta_p$  de la poutre en utilisant le théorème de Castigliano.

- Force  $P$  appliquée au milieu de la poutre.
- Nous n'utiliserons que l'énergie due à la flexion (négligeant l'énergie de l'effort tranchant)



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 10.0

Déterminer la flèche maximale  $\delta_p$  de la poutre en utilisant le théorème de Castigliano.

Les moments de flexion:

- Pour  $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$   $M_1(x) = \frac{P}{2}x$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

- Pour  $\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell$   $M_2(x) = \frac{P}{2}(\ell - x)$

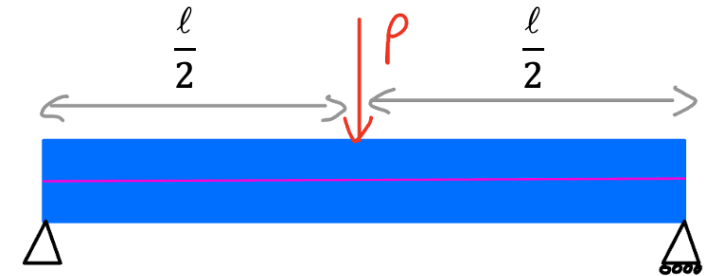
$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = \frac{\ell - x}{2}$$

Énergie de déformation

- $U = \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{M_2^2}{2EI} dx$

$$\delta_p = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell/2} \frac{Px^2}{4} dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{P}{2} (\ell - x) \frac{\ell - x}{2} dx$$

$$\delta_p = \frac{P\ell^3}{48EI}$$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

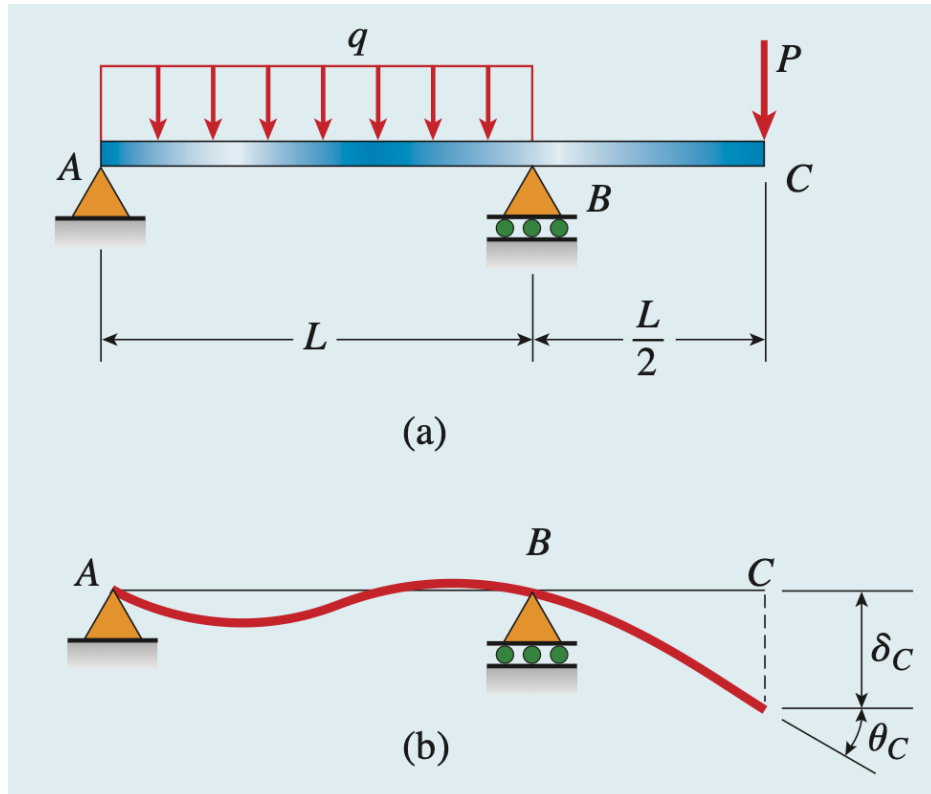
# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Exemple Castigliano



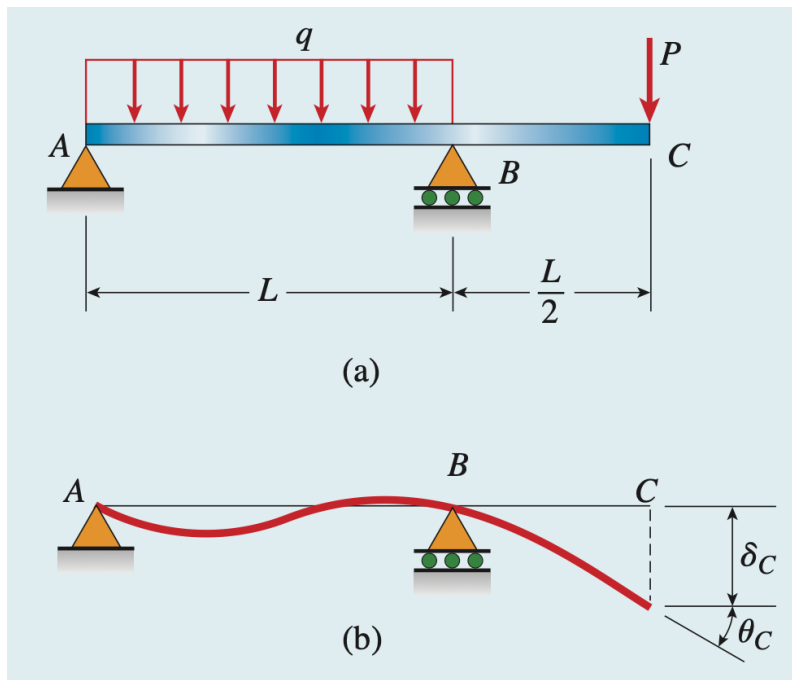
Trouvez le déplacement  $\delta_C$  et l'angle de rotation  $\theta_C$  au point C.

- Nous allons utiliser Théorème de Castigliano
- Donc je veux calculer l'énergie de déformation
- pour ce, il me faut les moments de flexion internes  $M_f$  (et surtout leur dépendance sur les forces aux points d'intérêt)
- Nous n'allons considérer ici que l'énergie de flexion. Ici pas de torsion, pas de force normale; nous allons ignorer l'énergie de l'effort tranchant.

$$\delta_k = \int_0^{\ell} \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P_k} dx$$

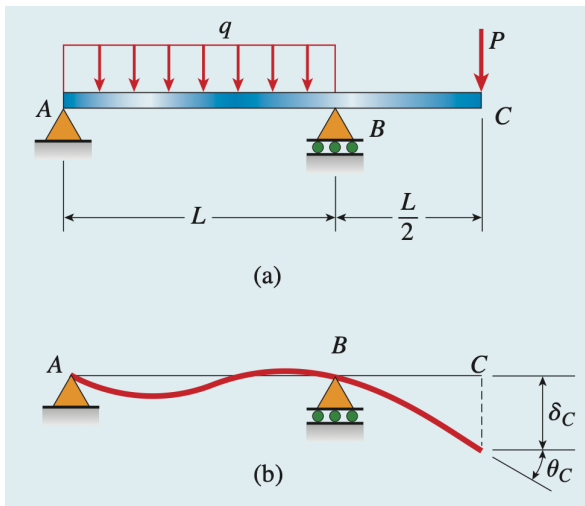
# Au point C, faut-il ajouter: une force fictive et ou un moment fictif?

- A. Ajouter Force & Moment
- B. Ajouter Force
- C. Ajouter Moment
- D. Ne rien ajouter



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique



1.1. Calcul de  $M_f$

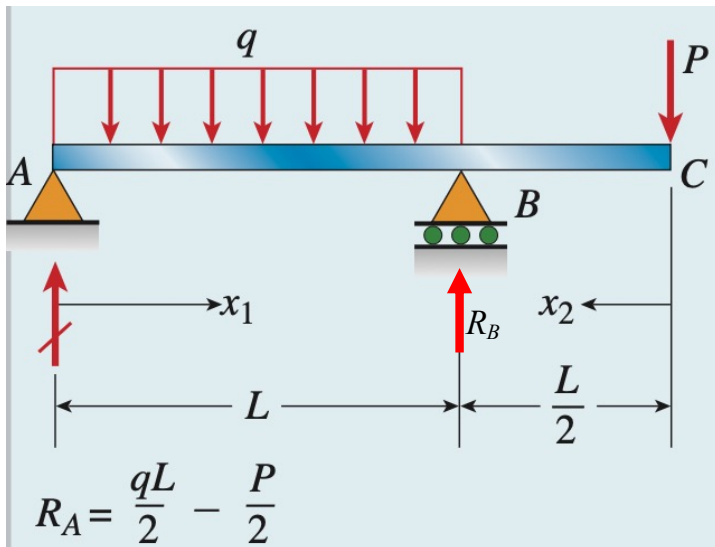
$$M_{AB} = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} = \frac{q L x_1}{2} - \frac{P x_1}{2} - \frac{q x_1^2}{2} \quad (0 \leq x_1 \leq L)$$

$$M_{BC} = -P x_2 \quad \left( 0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2} \right)$$

1.2. Calcul de  $\frac{\partial M_f}{\partial P}$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial P} = -\frac{x_1}{2} \quad (0 \leq x_1 \leq L)$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial P} = -x_2 \quad \left( 0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2} \right)$$



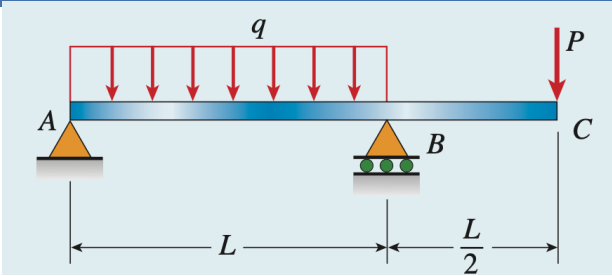
Start with free body diagram



Pour simplifier les expressions, j'ai pris 2 variables pour  $x$ :  $x_1$  et  $x_2$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique



1.3. Calcul de la déflexion  $\delta_c$  au point C, du à la force  $P$

$$\delta_c = \int \left( \frac{M}{EI} \right) \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) dx$$

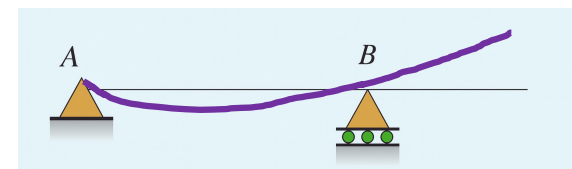
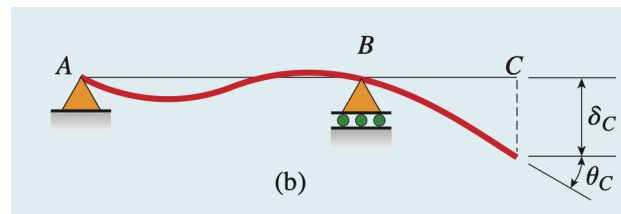
Castigliano, dérivée partielle par rapport à  $P$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \left( \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M_{BC} \left( \frac{\partial M_{BC}}{\partial P} \right) dx$$

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2} \right) \left( -\frac{x_1}{2} \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-Px_2)(-x_2) dx_2$$

$$\delta_c = \frac{PL^3}{8EI} - \frac{qL^4}{48EI}$$

Force positive vers le bas, donc  $\delta_c$  est aussi positif vers le bas



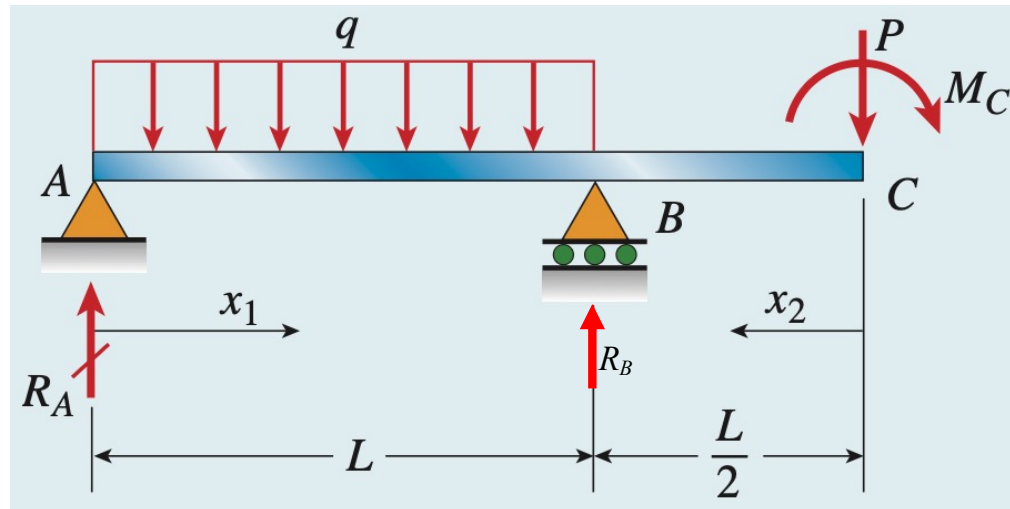
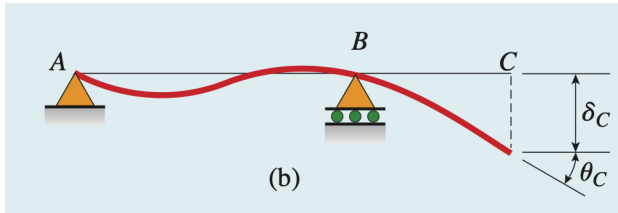
En C, déplacement vers le bas pour  $P > \frac{qL}{6}$  et vers le haut pour  $P < qL/6$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## 2. Calcul de de l'angle $\theta_c$ au point C

Il faut ajouter un moment fictif  $M_C$  en C



### 2.1. Calcul de $M_f$

$$R_A = \frac{qL}{2} - \frac{P}{2} - \frac{M_C}{L}$$

Attention, pas le même  $R_A$  qu'il y a deux slides !

$$M_{AB} = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} = \frac{q L x_1}{2} - \frac{P x_1}{2} - \frac{M_C x_1}{L} - \frac{q x_1^2}{2} \quad (0 \leq x_1 \leq L)$$

$$M_{BC} = -P x_2 - M_C \quad \left(0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

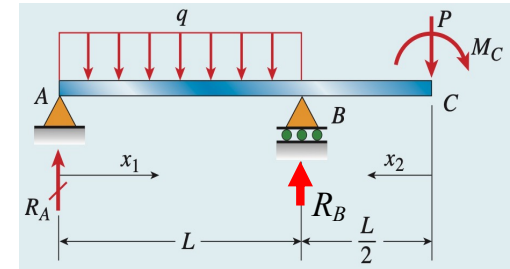
# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

2.2. Calcul de  $\frac{\partial M_f}{\partial P}$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial M_C} = -\frac{x_1}{L} \quad (0 \leq x_1 \leq L)$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial M_C} = -1 \quad \left(0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2}\right)$$

Castigliano, dérivée partielle par rapport à  $M_C$



2.3. Calcul de  $\theta_C$  en fonction de  $M_C$

$$\begin{aligned} \theta_C &= \int \left(\frac{M}{EI}\right) \left(\frac{\partial M}{\partial M_C}\right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \left(\frac{\partial M_{AB}}{\partial M_C}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M_{BC} \left(\frac{\partial M_{BC}}{\partial M_C}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{M_C x_1}{L} - \frac{qx_1^2}{2}\right) \left(-\frac{x_1}{L}\right) dx_1 \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-Px_2 - M_C)(-1) dx_2 \end{aligned}$$

2.4 Nous pouvons maintenant mettre  $M_C = 0$

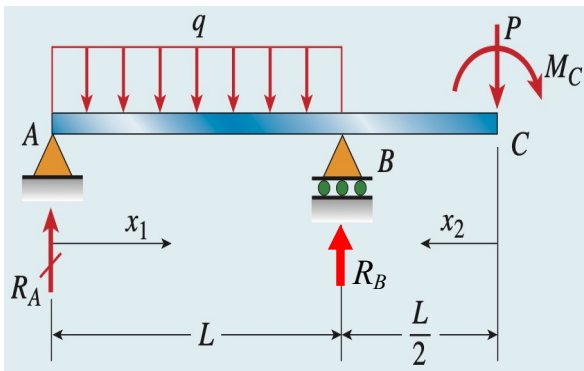
$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2}\right) \left(-\frac{x_1}{L}\right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-Px_2)(-1) dx_2$$

$$\theta_C = \frac{7PL^2}{24EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

Sens anti-trigo  $P > qL/7$  et sens trigo pour  $P < qL/7$

# Dans quel sens $\theta_C > 0$ ?

- A. Trigonométrique
- B. Anti-trigonométrique
- C. Je ne sais pas



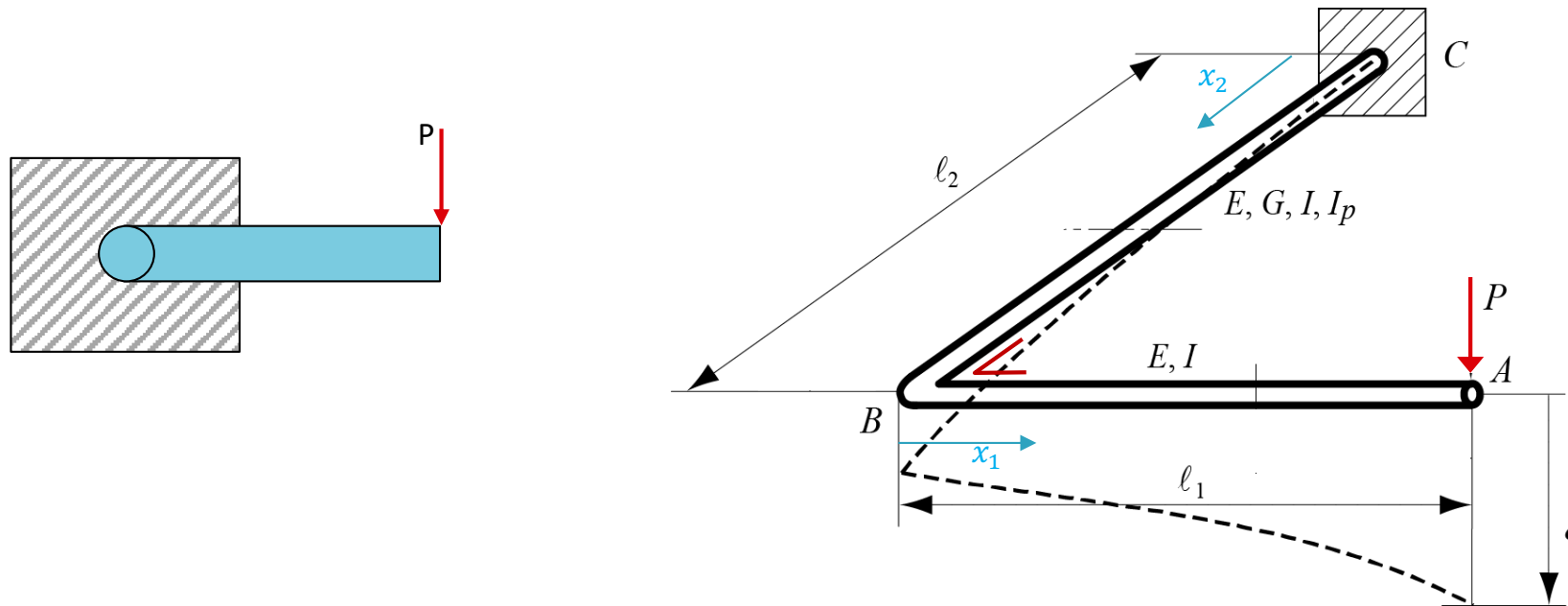
**Des Questions ?**

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 10.1

En négligeant l'influence de l'effort tranchant, déterminer par le théorème de Castigliano le déplacement vertical  $\delta$  du point  $A$  d'une poutre encastree (3D, coude perpendiculaire) en forme de  $L$ , de section circulaire, soumise à une force  $P$  en son extrémité libre

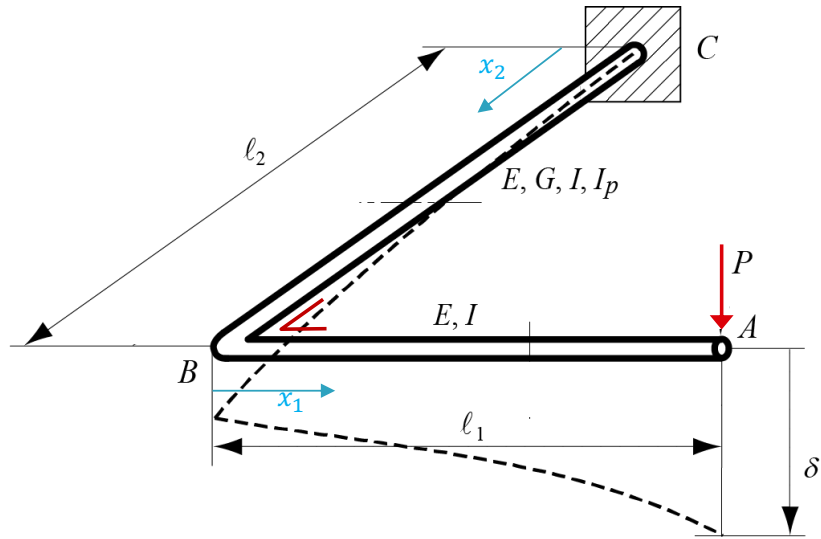


$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \int_0^l \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_k} dx + \int_0^l \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial P_k} dx + \int_0^l \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P_k} dx + \int_0^l \frac{\eta T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P_k} dx$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

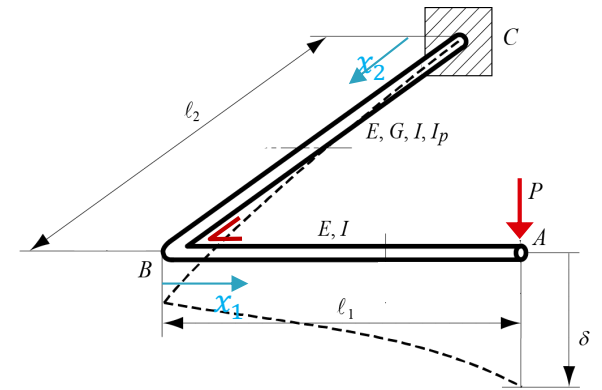
## Problème 10.1



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

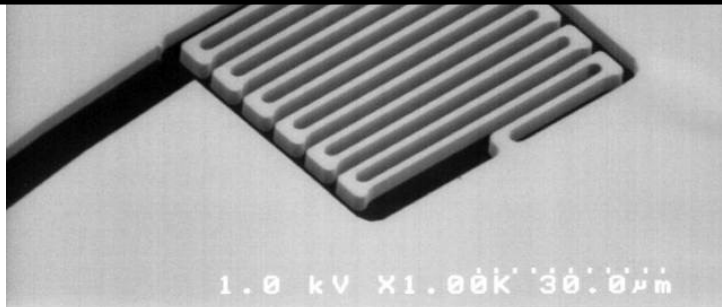
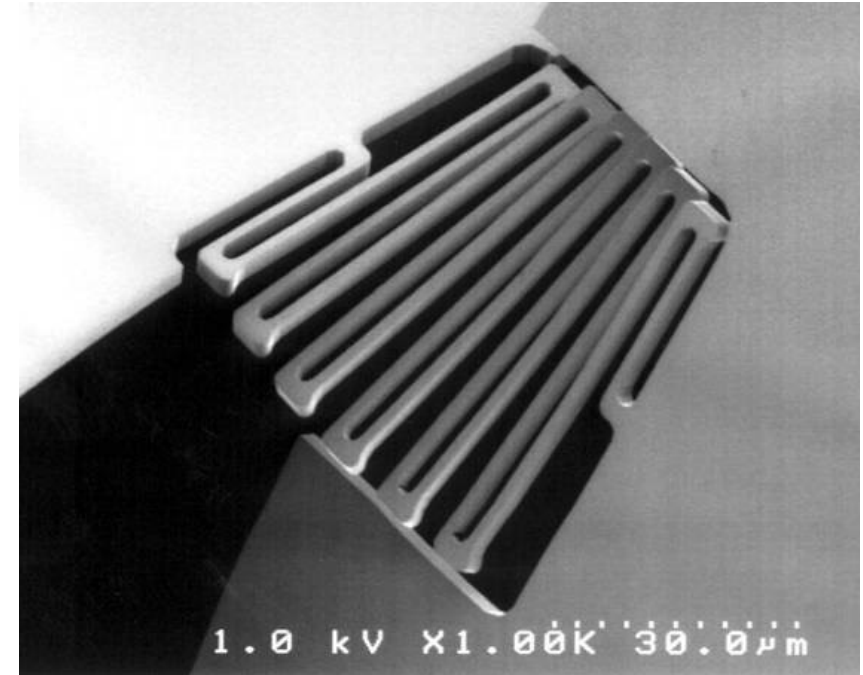
## Problème 10.1



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Exemple micro-miroirs MEMS



$$k_{ressort} = \frac{1}{N} k_{petite-poutre}$$

$$k_{ressort} \neq \frac{1}{N^3} k_{petite-poutre}$$

Car chaque poutre est encastée

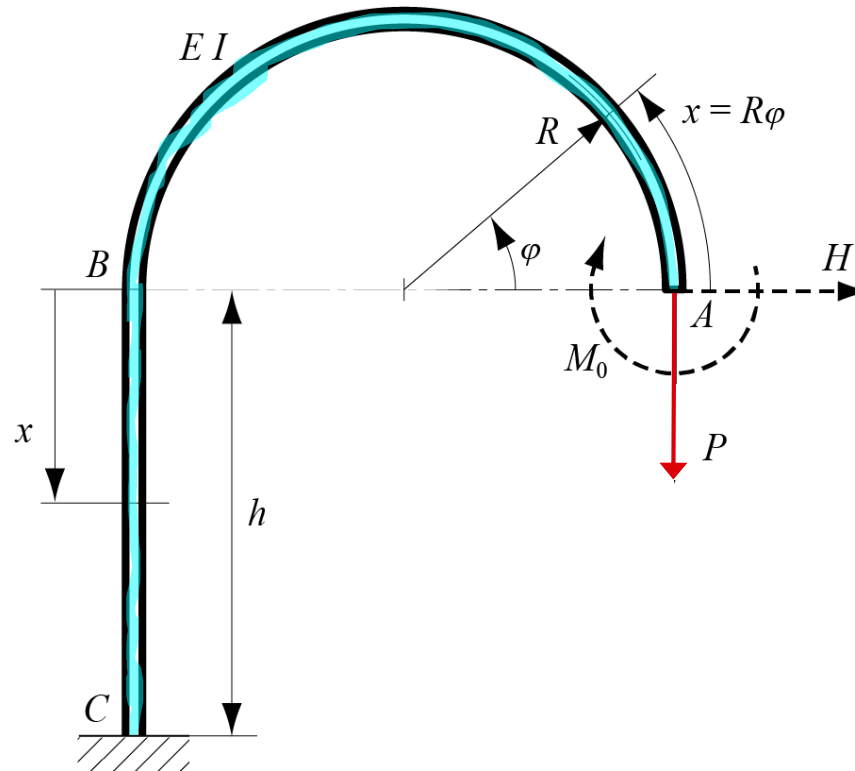


$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 10.2

En ne tenant compte que de la flexion et en recourant au théorème de Castigliano, calculer pour la poutre encastrée représentée: i) le déplacement vertical  $\delta_V$ , ii) le déplacement horizontal  $\delta_H$ , et iii) la rotation  $\alpha$  au point  $A$  où s'applique une force verticale  $P$ .



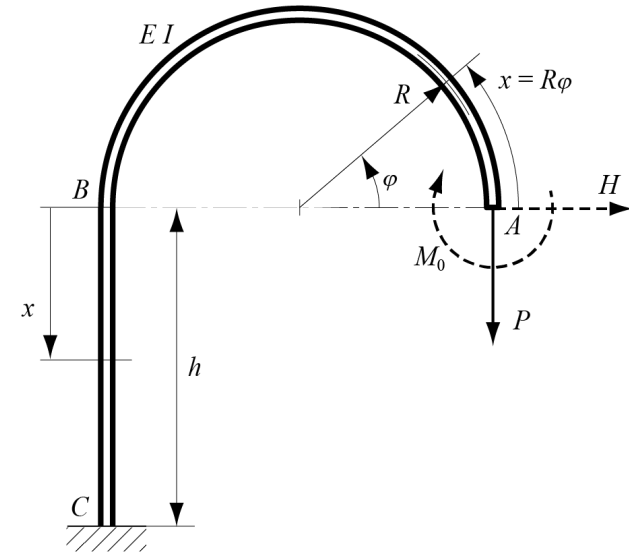
La force  $H$  et le moment  $M_0$  sont fictifs

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \int_0^{\ell} \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P_k} dx + \int_0^{\ell} \frac{\eta T}{GF} \frac{\partial T}{\partial P_k} dx$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 10.2

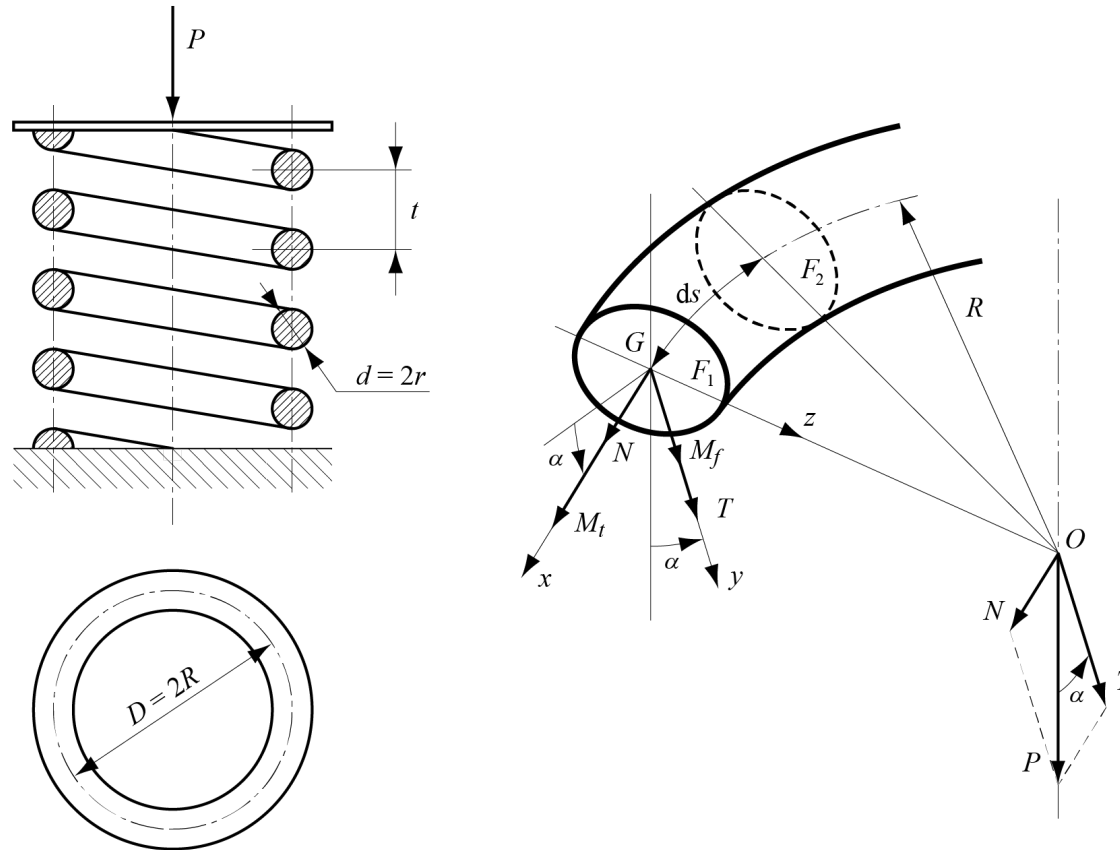


$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 5.2

Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre  $D$ , formé de  $n$  spires de diamètre  $d$  et soumis à une charge de compression  $P$ . Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.



La fibre moyenne du ressort est une hélice d'angle  $\alpha$  valant

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{t}{2\pi R}$$

où  $t$  dénote le pas d'une spire (fig. 5.10).

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 5.2

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Problème 5.2

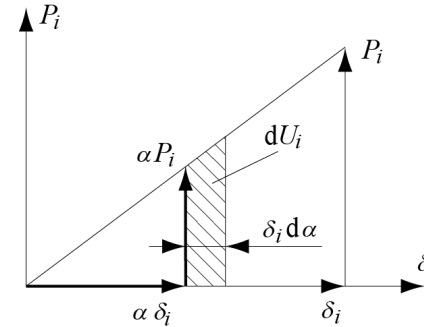
**Merci pour vote attention**

# Démonstration : Théorème de Castigliano

## Étapes justificatives

Première formule de Clapeyron

- $$U = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i$$

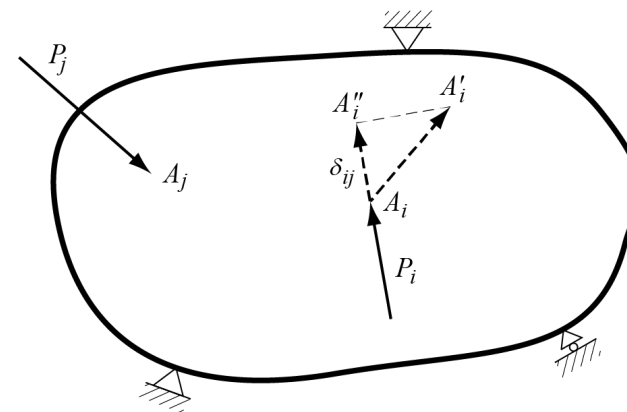


Le déplacement généralisé

- $$\delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} P_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$$

Seconde formule de Clapeyron

- $$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} P_i P_j$$

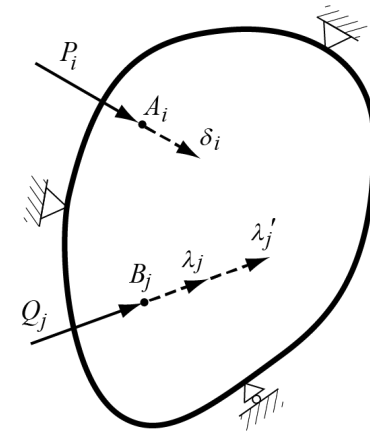
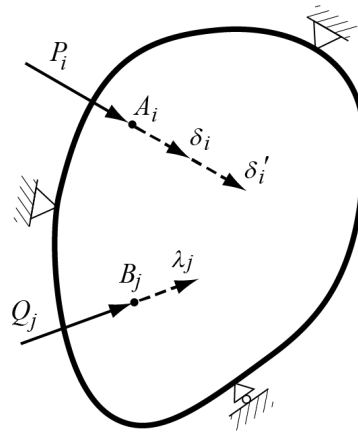


# Démonstration : Théorème de Castigliano

## Étapes justificatives

Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

- $$\sum_{i=1}^n \delta'_i P_i = \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$$



Le théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh exprime l'égalité de deux énergies et peut s'énoncer sous la forme plus restreinte de l'égalité des coefficients d'influence

- $$a_{ij} = a_{ji}$$

# Démonstration : Théorème de Castigliano

## Étapes justificatives

Théorème de Castigliano

- $$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_i P_j$$
- $$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_{ik} P_i P_k + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \alpha_{kj} P_k P_j + \frac{1}{2} \alpha_{kk} P_k^2 + U'$$
- $$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_{ik} P_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \alpha_{kj} P_j + \alpha_{kk} P_k$$
- $$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} P_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} P_j = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} \delta_k = \delta_k$$

Ainsi on peut écrire

→

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Démonstration : Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Considérons un corps élastique soumis à deux systèmes de forces généralisées  $P_i$  et  $Q_j$ , agissant respectivement aux points  $A_i$  et  $B_j$

Énergie de déformation (Clapeyron) induite par l'application de la force  $P_i$  au point  $A_i$

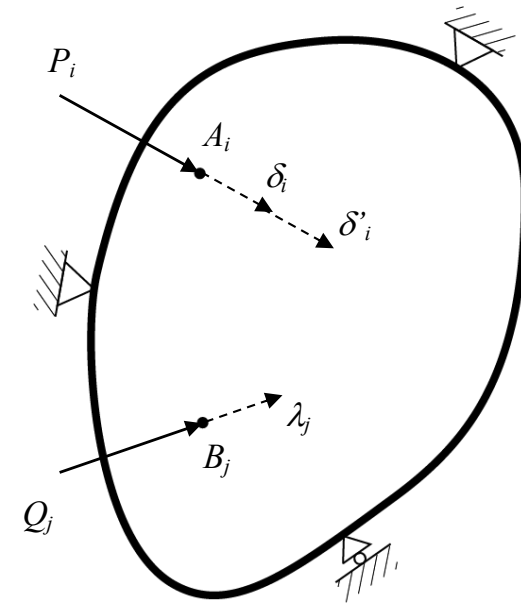
- $$U(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i$$

Énergie de déformation induite par l'application de la force  $Q_j$  au point  $B_j$

- $$U(Q_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_j Q_j$$

Énergie de déformation induite par l'application de la force  $Q_j$  au point  $A_i$

- $$U'(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta'_i P_i$$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Démonstration : Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Procédons maintenant de manière inverse, en appliquant d'abord les forces  $Q_j$  seules  
Énergie de déformation (Clapeyron) induite par l'application de la force  $Q_j$  au point  $B_j$

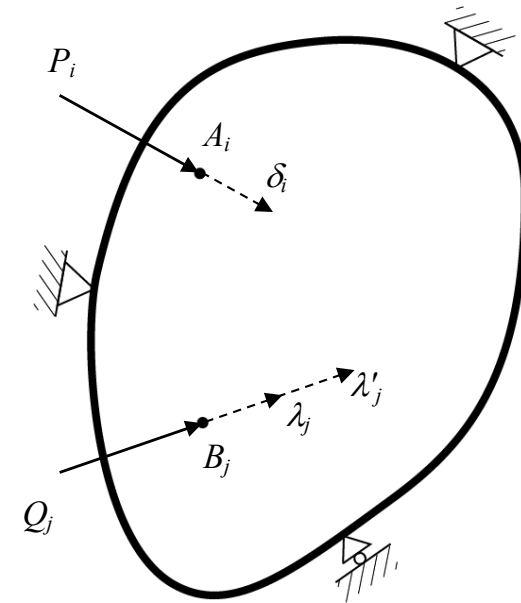
- $U(Q_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_j Q_j$

Énergie de déformation induite par l'application de la force  $P_i$  au point  $A_i$

- $U(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i$

Énergie de déformation induite par l'application de la force  $Q_j$  au point  $A_i$

- $U'(Q_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Démonstration : Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Dans l'état d'équilibre final, l'énergie de déformation totale est donnée par la somme des égalités.

- $U(P_i, Q_j) = U(P_i) + U(Q_j) + U'(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$
- $U(Q_j, P_i) = U(Q_j) + U(P_i) + U'(Q_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_j Q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta'_i P_i$

Les énergie déformation exprimées sont forcément égale puisqu'elles ne dépendent que de l'état final du système. D'où finalement, on retrouve l'expression exprimée du **théorème de réciprocité** énoncé précédemment

- $\sum_{i=1}^n \delta'_i P_i = \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Démonstration : Égalité des coefficients d'influence réciproques

A partir de ce nouvel état du système, appliquons au point  $A_j$  une force  $P_j$  qui entraîne un déplacement  $\delta_{jj}$  de ce point et un travail  $U_{jj}$

- $\delta_{jj} = a_{jj}P_j$
- $U_{jj} = \frac{1}{2}\delta_{jj}P_j = \frac{1}{2}a_{jj}P_j^2$

Cette force provoque en outre un nouveau déplacement  $\delta_{ij}$  au point  $A_i$

- $\delta_{ij} = a_{ij}P_j$
- $U_{ij} = \delta_{ij}P_j = a_{ij}P_jP_i$

L'énergie du système s'exprime ( $\Delta U$  le travail des autres forces  $n \neq i, j$ )

- $U = U_0 + \Delta U + \frac{1}{2}a_{ii}P_i^2 + \frac{1}{2}a_{jj}P_j^2 + a_{ij}P_jP_i$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Démonstration : Égalité des coefficients d'influence réciproques

Si l'on refait le même développement en appliquant  $P_j$  puis  $P_i$ , on trouve :

- $$U = U_0 + \Delta U + \frac{1}{2}a_{jj}P_j^2 + \frac{1}{2}a_{ii}P_i^2 + a_{ji}P_iP_j$$

$\Delta U$  ayant la même signification et la même valeur que précédemment, on a

- $$a_{ij}P_jP_i = a_{ji}P_iP_j$$

Et donc, on trouve l'expression du théorème de réciprocity de Betti-Rayleigh introduit au début de ce chapitre

- $$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

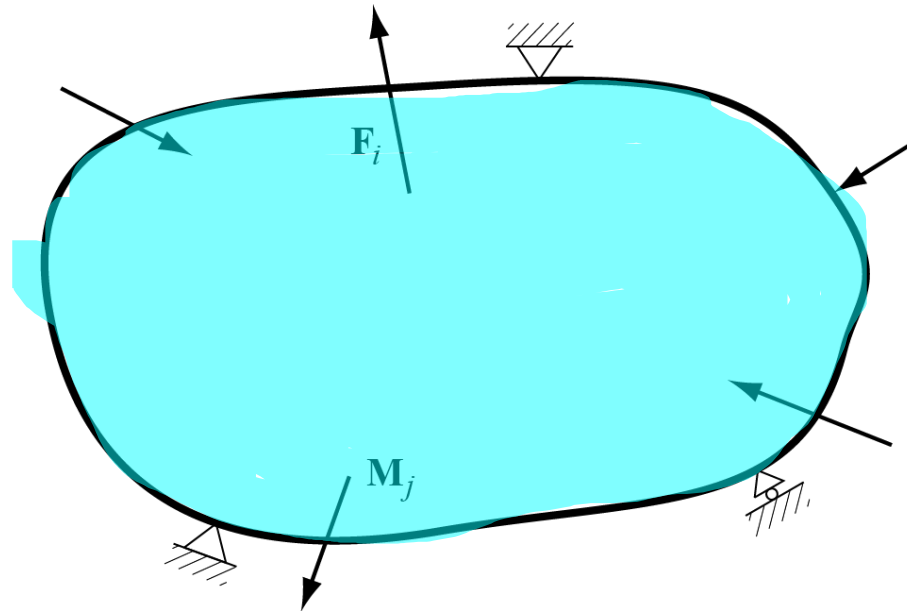
# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Dérivation de la Forme quadratique de l'énergie de déformation

Comme dans tous les cas particuliers examinés jusqu'ici, nous supposons que les **déformations sont élastiques** – donc réversibles – et **proportionnelles aux forces ou aux moments** qui les provoquent.

Considérons un système statique ou hyperstatique, astreint à un nombre quelconque de liaisons et soumis à  $n_1$  forces  $\mathbf{F}_i$  et  $n_2$  moments  $\mathbf{M}_j$ , tous indépendants.

Quand toutes les forces et tous les moments sont nuls, on dit que le système se trouve dans son état initial ou naturel.

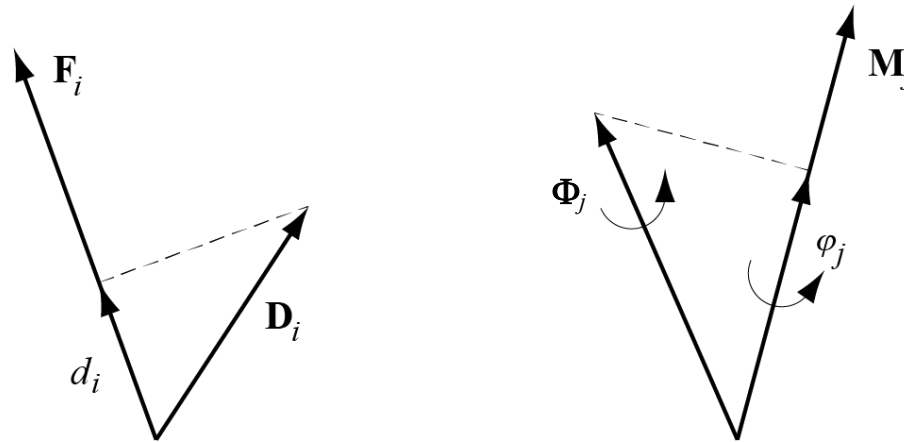


$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Forme quadratique de l'énergie de déformation

Soient  $\mathbf{D}_i$  le déplacement de la force  $\mathbf{F}_i$  et  $\Phi_j$  la rotation du moment  $\mathbf{M}_j$  entre l'état initial du système et l'état final considéré. Désignons par  $d_i$  et  $\varphi_j$  leurs projections respectives sur les supports de  $\mathbf{F}_i$  et  $\mathbf{M}_j$



Afin de simplifier l'écriture et de travailler avec des grandeurs scalaires, nous adoptons pour la suite la convention suivante :

- $P_i$  désigne une force généralisée, amplitude de la force  $\mathbf{F}_i$  ou du moment  $\mathbf{M}_i$
- $\delta_i$  dénote un déplacement généralisé (déplacement  $d_i$  ou rotation  $\varphi_i$ ) dans la direction de  $P_i$ .

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

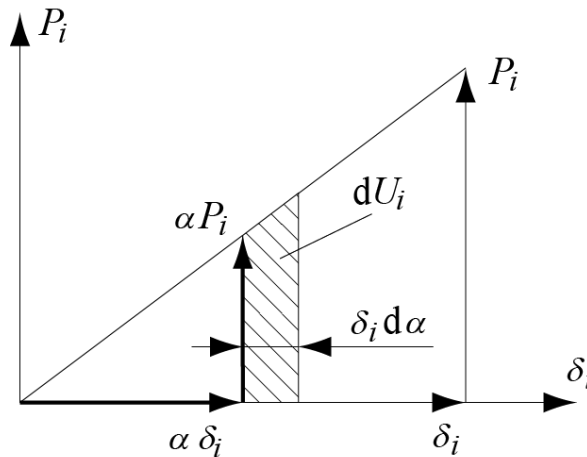
## Forme quadratique de l'énergie de déformation

Introduisons le travail d'une force généralisée (= force ou moment) élastique.

Un état intermédiaire peut être défini en fonction d'un **coefficient de proportionnalité**  $\alpha$  variant de 0 à 1 et qui détermine les forces  $\alpha P_i$  et les déplacements  $\alpha \delta_i$

Lors d'un accroissement  $d\alpha$  du coefficient de proportionnalité, chaque force  $P_i$  fournit un **travail élémentaire**.

- $dU_i = \alpha P_i \cdot \delta_i d\alpha$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

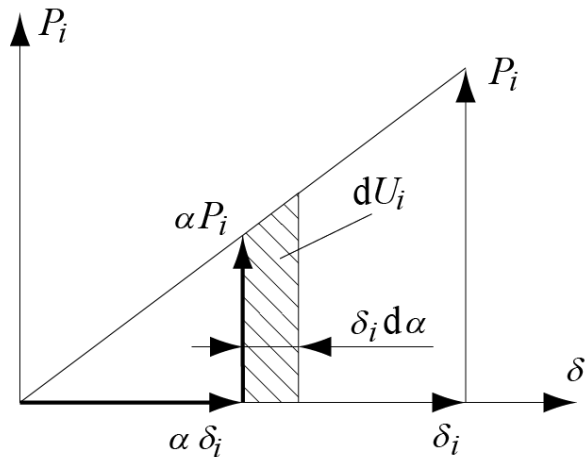
## Forme quadratique de l'énergie de déformation

L'augmentation d'énergie élastique du système a pour valeur, avec  $n = n_F + n_M$

- $dU = \sum_{i=1}^n dU_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \cdot \alpha d\alpha$

Il suffit d'intégrer cette expression pour obtenir l'énergie accumulée par le système dans son état final (formule de Clapeyron):

- $U = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

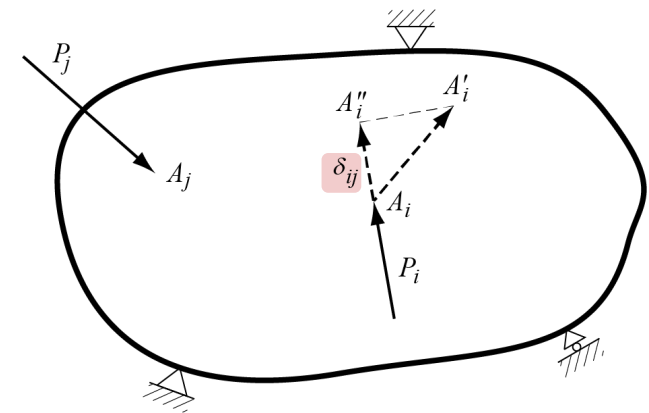
## Forme quadratique de l'énergie de déformation

La **proportionnalité entre forces et déplacements** permet d'appliquer le principe de superposition au système. Les déplacements  $\delta_i$  sont donc des fonctions linéaires des forces généralisées

$$\begin{aligned} \delta_i &= a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \dots + a_{ii}P_i + \dots + a_{ij}P_j + \dots + a_{in}P_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}P_j \\ &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{ii} + \dots + \delta_{ij} + \dots + \delta_{in} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \end{aligned}$$

Le coefficient de proportionnalité  $a_{ij}$ , appelé coefficient d'influence, est égal à la projection, sur la force généralisée  $P_i$  agissant au point  $A_i$ , du déplacement provoqué en ce point par une force unité appliquée au point  $A_j$  dans la direction de  $P_j$

Le scalaire  $\delta_{ij} = a_{ij}P_j$  est la contribution de la force  $P_j$  au déplacement du point d'application de la force  $P_i$  dans la direction de cette dernière



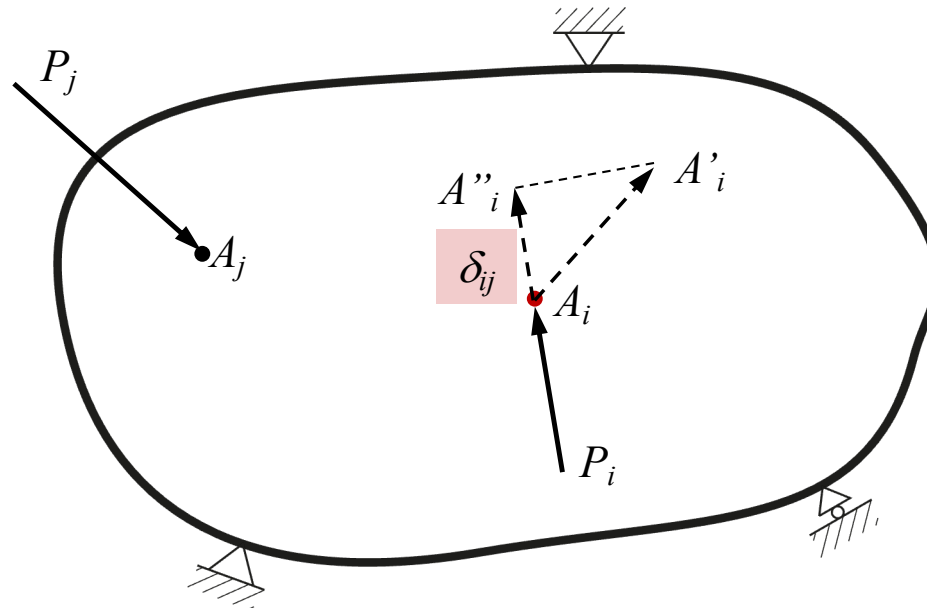
$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Forme quadratique de l'énergie de déformation

Interprétation du coefficient d'influence  $a_{ij}$

- $A_i A'_i =$  déplacement de  $P_i$  dû à  $P_j$
- $A_i A''_i = \delta_{ij}$



$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

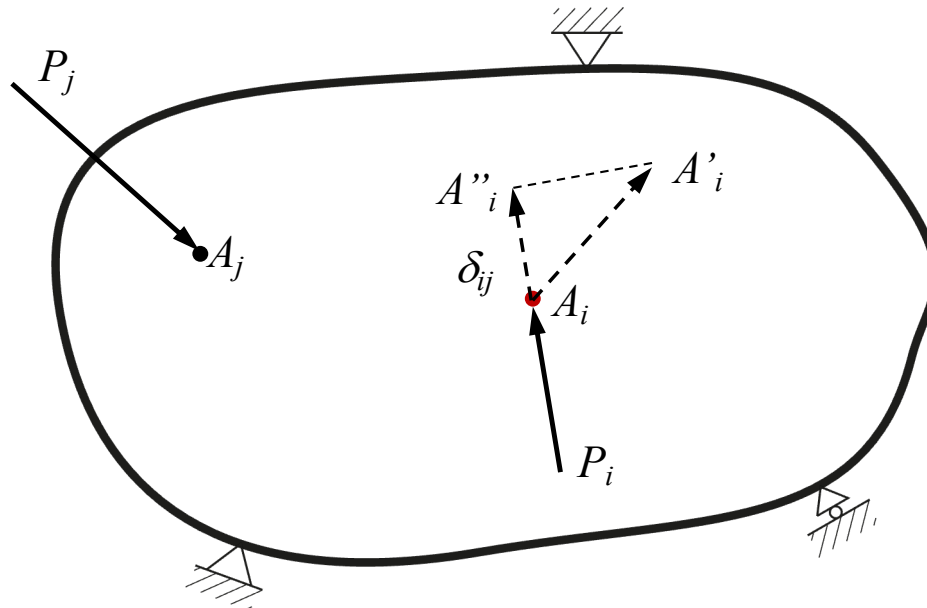
## Forme quadratique de l'énergie de déformation

L'expression peut ensuite être portée dans la formule de Clapeyron pour aboutir à la forme finale de la **seconde formule de Clapeyron**

- $$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} P_i P_j$$

↑  
 $\delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$

On voit que l'énergie de déformation élastique est une fonction **quadratique** des forces et moments agissant sur le système



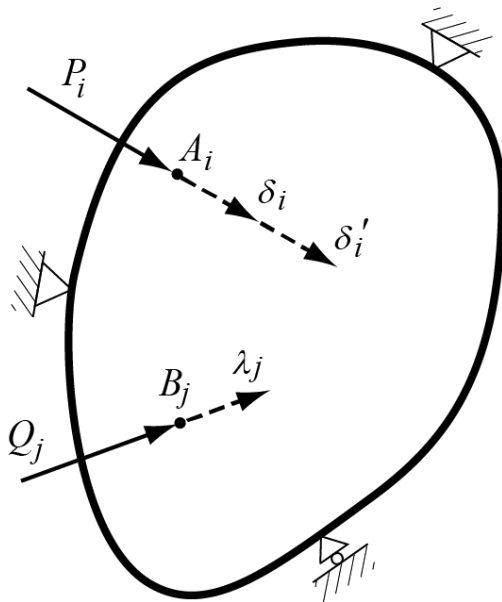
$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

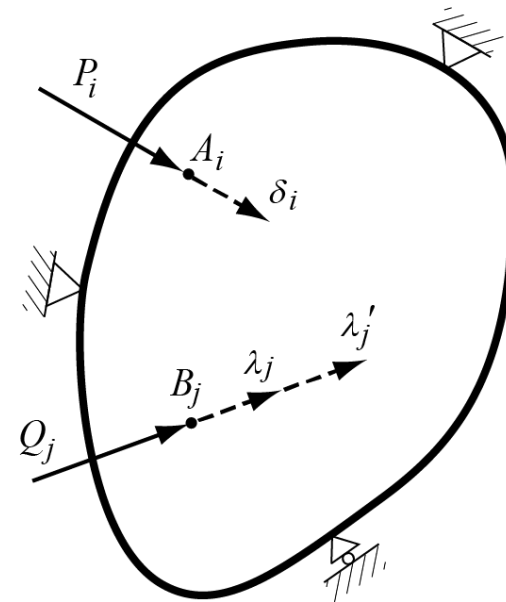
## Théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh

Dans un système élastique et proportionnel, le travail d'un système de forces  $P_i$ , lors de la déformation imposée par un second système de forces  $Q_j$ , est égal au travail du système de forces  $Q_j$  lors de la déformation imposée par le premier système de forces  $P_i$ .

- $$\sum_{i=1}^n \delta'_i P_i = \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$$



Système soumis successivement à une force  $P_i$  puis  $P_j$



Système soumis successivement à une force  $P_j$  puis  $P_i$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

# Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

## Égalité des coefficients d'influence réciproques

Le théorème de réciprocity de Betti-Rayleigh exprime l'égalité de deux énergies et peut s'énoncer sous la forme plus restreinte de **l'égalité des coefficients d'influence**

- $a_{ij} = a_{ji}$

*Théorème de l'égalité des coefficients d'influence réciproques : Dans un système élastique et proportionnel, les coefficients d'influence réciproques  $a_{ij}$  et  $a_{ji}$  relatifs aux déplacements des points d'application de deux forces extérieures  $P_i$  et  $P_j$  sont égaux*

Pour démontrer cette égalité, considérons un système déformé possédant une énergie de déformation  $U_0$ . Une nouvelle force  $P_i$  appliquée au point  $A_i$  provoque selon sa direction un déplacement  $\delta_{ii}$  de ce point et fournit l'énergie de déformation  $U_{ii}$  au système

- $\delta_{ii} = a_{ii}P_i$

- $U_{ii} = \frac{1}{2}\delta_{ii}P_i = \frac{1}{2}a_{ii}P_i^2$